Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Département de Mathématiques
Al Hoceima, Maroc

Module Mathématiques AP11
Algèbre de base I

Cycle Préparatoire : Sciences et Techniques Pour l'Ingénieur

Younes ABOUELHANOUNE

Programme

Chapitres :

1. **Logiques & Relations et applications**
2. **Structures algébriques**
3. **Arithmétique dans Z**
4. **Polynômes et fraction rationnelle**

Mode d’évaluation :

Note Finale = Controle continue 40% + Examen 60%

Controle continue = Devoir Libre

*** Si   NF > 10   le module est validé**

*** Si   NF < 10   Rattrapage**

Chapitre 1

Logiques & Relations binaires

Opérations logiques élémentaires:

1- Connecteurs logiques

2- Quantificateurs

3- Quelques formes de raisonnements logiques

4- Relation binaires et Ensembles

Objectif du mathématique :

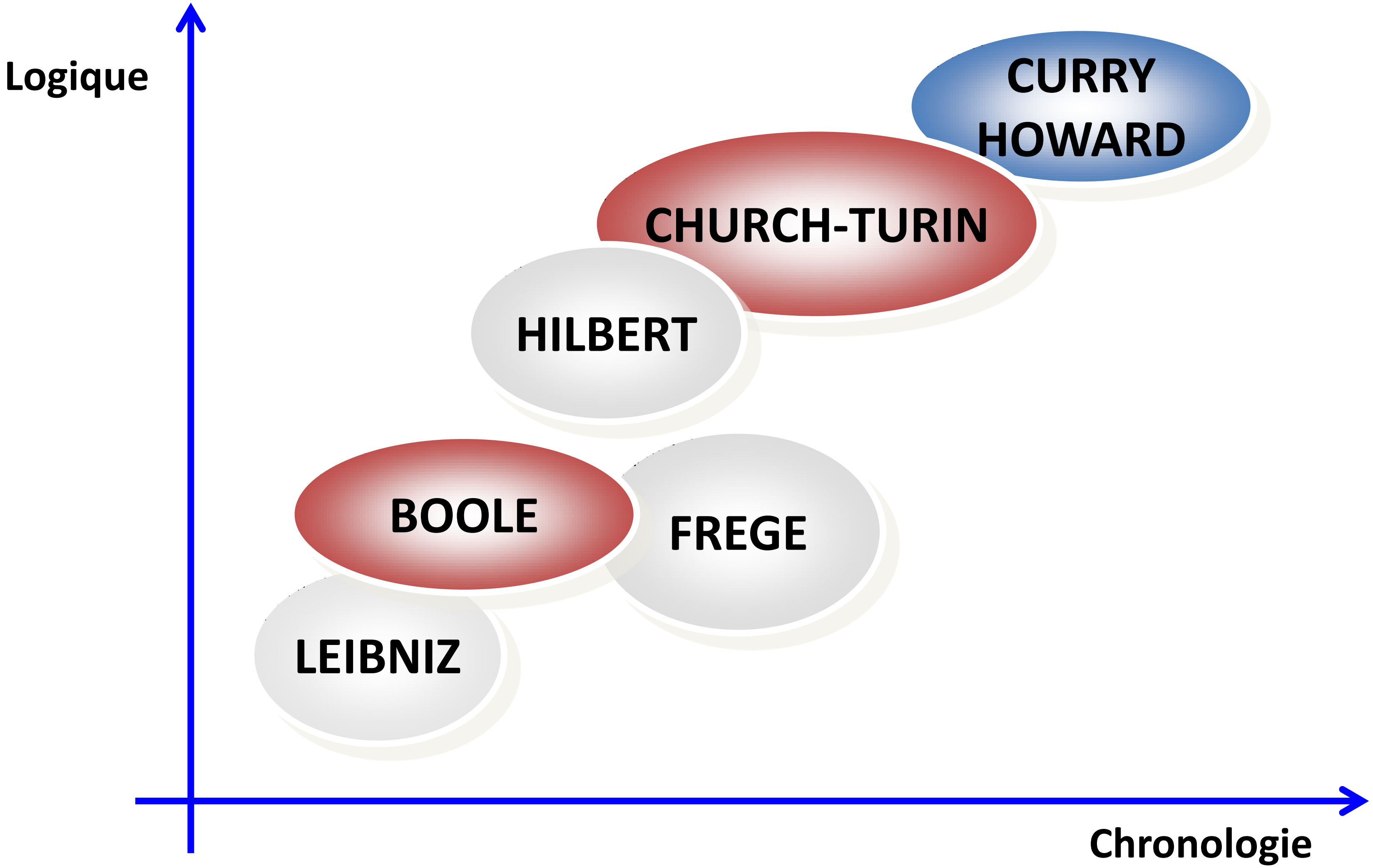
Mathématique est un langage adapté aux phénomènes complexes, qui rend les calculs exacts et vérifiables.

les mathématiques tentent de ***distinguer le vrai du faux.***

Logique

Raisonnement

Historique:


Logique
CURRY
HOWARD
CHURCH-TURIN
HILBERT
BOOLE
FREGE
LEIBNIZ
Chronologie

Chapitre 1 : Opérations logiques élémentaires

- **LEIBNIZ** : Notation mathématique moderne
- **BOOLE** (XXème siècle) : Logique mathématique avec calcul de vérité
- **FREGE** (Début XXème.) : extension tenant compte de la notion de variable $\Rightarrow$ Systèmes logiques formalisés
- **HILBERT** (1900) : 23 problèmes non résolus

$\Rightarrow$ Nombreux travaux en logique : Axiomes de Peano en arithmétique, Théorie des ensembles, Théorie des modèles

- **CHURCH , TURING** (années 30) : Algorithmique

$\Rightarrow$ Lambda-Calcul et Machine de Turing : Naissance du premier langage de programmation

- **CURRY-HOWARD** : Correspondance entre preuves formelles et Lambda-Calcul

1. Logique :

1.1. Assertions:

Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemples :

- « $2 + 2 = 4$ »
- « $2 * 3 = 7$ »
- « *Pour tout* $x \in R^*$, *on a* $x^2 > 0$ »
- « *Pour tout* $z \in C$, *on a* $|z| = 1$ »

Si *P est une assertion et Q est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à* partir de *P et de Q*.

1. Logique :

- **L'opérateur logique « *et* »**

L'assertion « P et Q » est vraie si P est vraie et Q est vraie. L'assertion « P et Q » est fausse sinon.

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	F

- **L'opérateur logique « ou »**

L'assertion « P ou Q » est vraie si l'une (au moins) des deux assertions P ou Q est vraie. L'assertion « P ou Q » est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses.

$P \setminus Q$	V	F
V	V	V
F	V	F

1. Logique :

❑ La négation *« non »*

L'assertion « **non *P* » *est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.***

P	V	F
non P	F	V

❑ L'implication $\Longrightarrow$

L'assertion « *(non P) ou Q* » *est notée* $P \Rightarrow Q$

Sa table de vérité est donc la suivante :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	V	V

1. Logique :

❑ L'équivalence : $\Longleftrightarrow$

On dira « *P est équivalent à Q* » *ou* « *P équivaut à Q* » *ou* « *P si et seulement si Q* ». *Cette assertion est vraie*

lorsque *P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses.*

Table de vérité est :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	V

Proposition 1:

Soient P,Q,R trois assertions. Nous avons les équivalences suivantes :

1. *P <===> non(non(P))*
2. *(P **et** Q) <===> (Q **et** P)*
3. *(P **ou** Q) <===> (Q **ou** P)*
4. *non(P **et** Q) <===> (**non** P) **ou** (**non** Q)*
5. *non(P **ou** Q) <===> (**non** P) **et** (**non** Q)*
6. *P **et** (Q **ou** R) <===> (P **et** Q) **ou** (P **et** R)*
7. *P **ou** (Q **et** R) <===> (P **ou** Q) **et** (P **ou** R)*
8. *P ==>Q <===> **non(Q)** ==> **non(P)***

Démonstration (TD): Montrer les équivalences 4 ,6 et 8

2. Quantificateurs :

❑ Le quantificateur ∀ : « *pour tout* »

Une assertion *P peut dépendre d'un paramètre x, par exemple « $x^2 > 1$ », l'assertion P(x) est vraie ou* fausse selon la valeur de *x*.

Exemples :

- $\forall x \in [1, +\infty[\quad x^2 \geq 1$ *est une assertion **vraie**.*
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 1$ *est une assertion **fausse**.*
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad n(n+1)$ *est divisible par 2 est **vraie**.*

2. Quantificateurs :

❑ Le quantificateur ∃ : *« il existe »*

Une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un *x de E pour lequel P(x) est vraie*

Exemples :

• $\exists x \in \mathbb{R} /\ x(x-1)<0$ *est **vraie** (par exemple x = 1/2* vérifie bien la propriété).

• $\exists n \in \mathbb{N} /\ n^2-n>0$ *est **vraie** (il y a plein de choix, par exemple n = 3 convient, mais aussi n = 10 ou* même *n = 100, un seul suffit pour dire que l'assertion est vraie).*

• $\exists x \in \mathbb{R} /\ x^2=-1$ *est **fausse** (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif).*

2. Quantificateurs :

- **La négation des quantificateurs**

$$La \text{ négation de } \forall x \in E \;\; P(x) \;\; \text{est} \;\; \exists x \in E \;\; \text{non } P(x)$$

$$La \text{ négation de } \exists x \in E \;\; P(x) \;\; \text{est} \;\; \forall x \in E \;\; \text{non } P(x)$$

Exemples : Donner la négation des assertions suivantes

$$\forall x \in [1,+\infty[\quad \text{tel que} \quad x^2 \geq 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \;/\; x+1 \in \mathbb{Z}$$

$$\exists z \in \mathbb{C} \;/\; z^2 + z + 1 = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y > 0 \quad x + y > 10$$

3. Raisonnements:

Un raisonnement est une manière d'arriver à une conclusion en partant d'une (ou de plusieurs) hypothèse(s), et en utilisant les règles de déduction d'une proposition à partir d'une autre.

Types de raisonnement :

1. **Raisonnement direct**
2. **Cas par cas**
3. **Contraposée**
4. **Absurde**
5. **Contre-exemple**
6. **Raisonnement par Récurrence.**

3.1. Raisonnement Direct :

On veut montrer que l'assertion « $P \Rightarrow Q$ » *est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q* est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

Exemple 1 :

Montrer que si $(a, b) \in Q$ *alors* $a + b \in Q$.

Démonstration. Prenons $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$. Rappelons que les rationnels $\mathbb{Q}$ sont l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Alors $a = \frac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et un certain $q \in \mathbb{N}^*$. De même $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$. Maintenant

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}.$$

Or le numérateur $pq' + qp'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur qq' est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a + b$ s'écrit bien de la forme $a + b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$, $q'' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$.

3.2. Raisonnements Cas par cas:

Si l'on souhaite vérifier une assertion *P(x) pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour* les *x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A. C'est la méthode de* **disjonction ou du cas par cas.**

Exemple 2:

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x-1| \leq x^2 - x + 1$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : $x \geqslant 1$. Alors $|x-1| = x-1$. Calculons alors $x^2 - x + 1 - |x-1|$.

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 - |x-1| &= x^2 - x + 1 - (x-1) \\ &= x^2 - 2x + 2 \\ &= (x-1)^2 + 1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi $x^2 - x + 1 - |x-1| \geqslant 0$ et donc $x^2 - x + 1 \geqslant |x-1|$.

Deuxième cas : $x < 1$. Alors $|x-1| = -(x-1)$. Nous obtenons $x^2-x+1-|x-1| = x^2-x+1+(x-1) = x^2 \geqslant 0$. Et donc $x^2 - x + 1 \geqslant |x-1|$.

Conclusion. Dans tous les cas $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$. □

3.3. Raisonnements par Contraposée :

Le raisonnement par ***contraposition est basé sur l'équivalence suivante***

$$l'\textit{assertion}\ \ \mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q} \quad \text{est équivalente à} \ \ \text{non P} \ \Rightarrow \text{non Q}$$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion « ***P => Q*** », *on montre en fait que si* ***non(Q)*** *est vraie alors* ***non(P)*** est vraie.

Exemple 3:

Soit $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que si* n^2 *est pair alors n est pair.*

Démonstration. Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2\ell+1$ avec $\ell = 2k^2+2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 est impair.

Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair. $\square$

3.3. Raisonnements par Absurde:

montrer « P => Q » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que *P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être* vraie et donc « *P => Q » est vraie.*

Exemple 4:
Soient a,b ≥ 0. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ *alors* a=b

Démonstration. Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a) = b(1+b)$ donc $a + a^2 = b + b^2$ d'où $a^2 - b^2 = b - a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$. Comme $a \neq b$ alors $a - b \neq 0$ et donc en divisant par $a - b$ on obtient $a + b = -1$. La somme des deux nombres positifs a et b ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

Conclusion : si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$. □

3.4. Raisonnement Contre-exemple:

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E\ P(x)$ » *est vraie alors pour chaque x de E il faut* montrer que *P(x) est vraie. P.* Trouver *un* ***contre-exemple à l'assertion*** **«**$\forall x \in E\ P(x)$ **».**

Exemple 5:
Montrer que l'assertion suivante est fausse « ***Tout entier positif est somme de trois carrés*** ». (Les carrés sont les 0^2, 1^2, 2^2, 3^2,... Par exemple $6 = 2^2 + 1^2 + 0^2$.)

Démonstration. Un contre-exemple est 7 : les carrés inférieurs à 7 sont 0, 1, 4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7. □

3.4. Raisonnement par Récurrence:

Le *principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion P(n), dépendant de n, est vraie pour tout n $\in$ N. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :* ***Initialisation, l'Hérédité et la conclusion***

Exemple 6:

Montrer que pour tout $n \in N$, $2^n > n$.

Démonstration. Pour $n \geqslant 0$, notons $P(n)$ l'assertion suivante :

$$2^n > n.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Initialisation. Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Fixons $n \geqslant 0$. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} = 2^n + 2^n &> n + 2^n && \text{car par } P(n) \text{ nous savons } 2^n > n, \\ &> n + 1 && \text{car } 2^n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geqslant 0$. $\square$

1. Ensembles Et Applications:

3.1. Ensembles:

3.1. Définition : un *ensemble est une collection d'éléments.*

- **Exemples** :

$$\{0,1\} \ , \ \{rouge, noir\} \ , \ \{0,1,2,....\} = \mathbb{N} \ , \ \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 1\}$$

3.1. Propriétés sur les ensembles:

1- Inclusion
2- Union
3- Intersection
4- Complémentaire

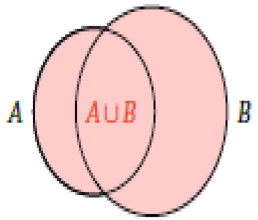
3.1.1 Inclusion :

$E \subset F$ *si tout élément de E est aussi un élément de F. Autrement dit*

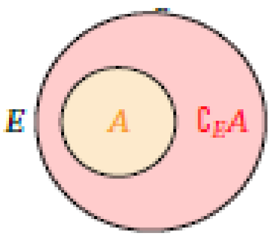
$$\forall x \in E \quad \text{alors} \quad x \in F$$

3.1.2 Union :

Pour $A,B \subset E$ $$A \bigcup B = \{x \in E \setminus x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



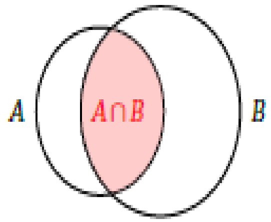
3.1.3 Complémentaire : *On la note E/A ou bien* $\bar{A}$



$$Si \ A \subset E \qquad C_E A = \bar{A} = \{x \in E \setminus x \notin A\}$$

3.1.4 Intersection. :

$$A \bigcap B = \{x \in E \setminus x \in A \text{ et } x \in B\}$$



3. Les ensembles: Règles de calculs

Soient *A, B, C des parties d'un ensemble E.*

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (on peut donc écrire $A \cap B \cap C$ sans ambigüité)
- $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap A = A$, $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (on peut donc écrire $A \cup B \cup C$ sans ambiguïté)
- $A \cup \emptyset = A$, $A \cup A = A$, $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$
- $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$
- $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$
- $\complement(\complement A) = A$ et donc $A \subset B \Longleftrightarrow \complement B \subset \complement A$
- $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$
- $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

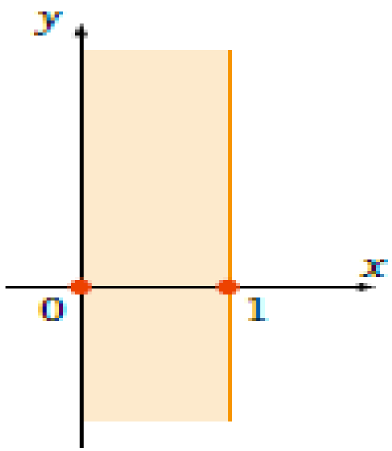
3. Les ensembles: Produit cartésien

Soient *E et F deux ensembles. Le produit cartésien, noté E * F, est l'ensemble des couples (x, y) où x* $\in$ *E* et *y* $\in$ *F.*

Exemples :

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} * \mathbb{R} = \left\{(x, y) \backslash x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

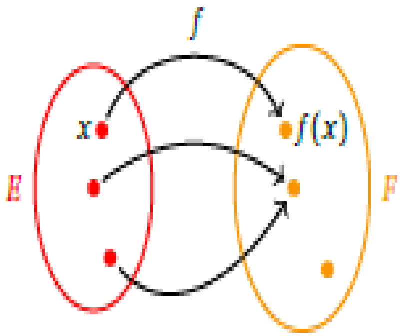
$$[0,1] * \mathbb{R} = \left\{(x, y) \backslash 0 \leq x \leq 1,\ y \in \mathbb{R}\right\}$$



4. Relations et Applications :

1.1. Définitions

Une *application (ou une fonction) f : E → F, c'est la donnée pour chaque élément x ∈ E d'un unique* élément de *F noté f (x).*



Propriétés :

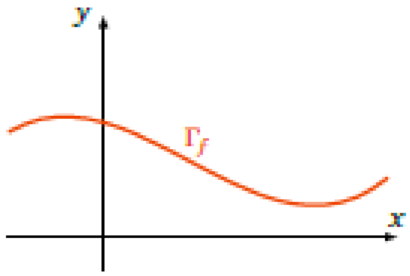
1- Égalité*:*

Deux applications f , g : E → F sont égales si et seulement si pour tout x ∈ E, f (x) = g(x).

On note alors ***f = g***

2- Le *graphe de f* : *f : E → F*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in E * F \,/\, x \in E\}$$



4. Relations et Applications :

3- *Identité* : $Id_E : E \to E$ est simplement $x \to x$

4- Composition : Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ alors

$$g \; o \; f(x) = g(f(x))$$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r] \arrow[r, bend left, "g"] & G
\end{tikzcd}$$

Exemple :

Définissons f, g ainsi

$$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}, \quad g : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x-1}{x+1} \end{array}$$

Monter que g o f(x)= - g(x)

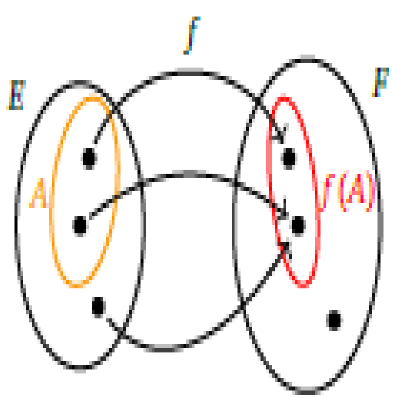
4.1. Image directe, image réciproque

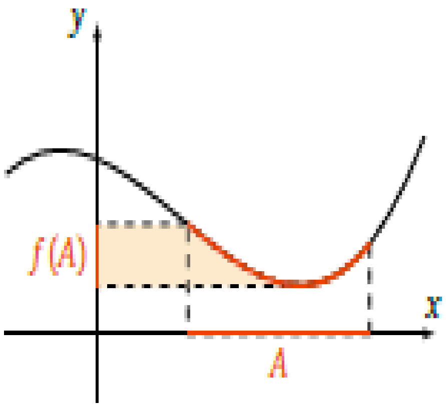
Soient *E, F deux ensembles*

Définition 1: *Soit* $A \subset E$ et $f : E \to F$

Alors, l'*image directe de A par f est l'ensemble*

$$f(A) = \{ f(x) / x \in A \}$$

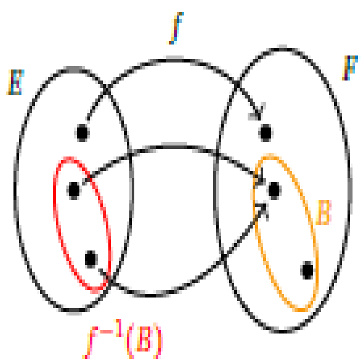


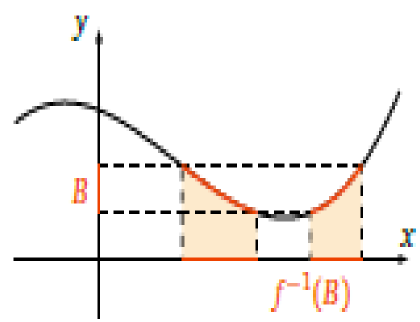


Définition 2: *Soit* $\mathrm{B} \subset F$ et $f\ : E \to F$

l'*image réciproque de B par f est l'ensemble*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ /\ f(x) \in B\}$$





4.2. Antécédents :

Fixons $y \in F$.

Tout élément $x \in E$ *tel que* $f(x) = y$ *est un* ***antécédent de y.***

4.3. Injection, surjection, bijection

4.3.1. Injection et surjection:

Soit *E*, *F deux ensembles et f : E* → *F une application.*

Définition 1 : f est *injective si pour tout x, x'* $\in$ *E avec f (x) = f (x') alors x = x'.*

$$\forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Définition 2 : f est *surjective si pour tout y* $\in$ *F, il existe x* $\in$ *E tel que y = f (x).*

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \qquad y = f(x)$$

Remarque.

- *f est injective si et seulement si tout élément y de F a au plus un antécédent (et éventuellement aucun).*
- *f est surjective si et seulement si tout élément y de F a au moins un antécédent.*

4.3. Injection, surjection, bijection

Exemple 1 :

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

Montrer que f est injective.

Montrons que f_1 est injective : soit $x, x' \in \mathbb{N}$ tels que $f_1(x) = f_1(x')$. Alors $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x'}$, donc $1+x = 1+x'$ et donc $x = x'$.

Ainsi f_1 est injective.

Est ce que f est surjective ?????

Par contre f_1 n'est pas surjective. Il s'agit de trouver un élément y qui n'a pas d'antécédent par f_1. Ici il est facile de voir que l'on a toujours $f_1(x) \leqslant 1$ et donc par exemple $y = 2$ n'a pas d'antécédent. Ainsi f_1 n'est pas surjective.

4.3. Injection, surjection, bijection

Exemple 2:

Soit $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par $g(x) = x^2$

Montrer que g n'est pas injective et non surjective.

Soit $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par $f_2(x) = x^2$.

Alors f_2 n'est pas injective. En effet on peut trouver deux éléments $x, x' \in \mathbb{Z}$ différents tels que $f_2(x) = f_2(x')$.

Il suffit de prendre par exemple $x = 2$, $x' = -2$.

f_2 n'est pas non plus surjective, en effet il existe des éléments $y \in \mathbb{N}$ qui n'ont aucun antécédent.

Par exemple $y = 3$: si $y = 3$ avait un antécédent x par f_2, nous aurions $f_2(x) = y$, c'est-à-dire $x^2 = 3$, d'où $x = \pm\sqrt{3}$. Mais alors x n'est pas un entier de $\mathbb{Z}$. Donc $y = 3$ n'a pas d'antécédent et f_2 n'est pas surjective.

4. Ensembles et Applications :

4.3. Injection, surjection, bijection

4.3.1. Bijection :

Définition :

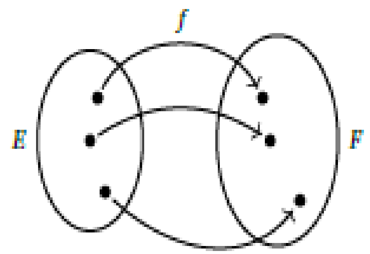
f est bijective si elle injective et surjective.

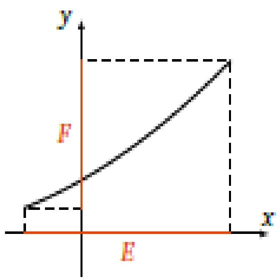
Cela équivaut à : pour tout y $\in F$ il existe un unique x $\in E$ tel que *y = f (x).*

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in E \qquad y = f(x)$$

L'existence du *x vient de la **surjectivité** et l'unicité de **l'injectivité**.*

Autrement dit, tout élément de F a un unique **antécédent** par *f* .





4- Bijection

Définition :

- Soit f une application de E vers F. On dit que f est une application bijective, ou une bijection, si tout élément de F possède un antécédent et un seul dans E.

b) Propriétés :

- Soit $f \in A(E,F)$:
  - f est une bijection ssi $\forall y \in F, \exists! x \in E / y = f(x)$
  - f est une bijection ssi f est à la fois injective et surjective
- Soit $f \in A(E,F)$ et $g \in A(F,G)$:
  - Si f et g sont bijectives alors $h = g \circ f$ est bijective

4- Bijection réciproque

Définition :

- Soit f une bijection de E vers F. On appelle application réciproque de f et on note f^{-1}, l'application définie de F vers E et qui associe à tout élément de F son unique antécédent dans E par la bijection f.

Remarque :

- Ne pas confondre l'application réciproque d'une bijection et l'image réciproque qui existe, même lorsque n'est pas bijective.

4- Propriétés de la bijection réciproque

- Soit $f \in A(E,F)$ une bijection :
  - f^{-1} est une bijection
  - f c'est la réciproque de sa réciproque : $(f^{-1})^{-1} = f$
  - $\forall x \in E, \forall y \in F$: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$
  - $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$

- Soit $f \in A(E,F)$:
  - f est bijective ssi $\exists g \in A(F,E) / f \circ g = Id_F$ *et* $g \circ f = Id_E$, et alors $g = f^{-1}$

4. Relations binaires :

Définition 1: On appelle relation binaire, toute assertion entre deux objets, pouvant être vérifiée ou non. On note xRy et on lit “x est en relation avec y”.

Définition 2 : Soit *E et F deux ensembles.*
On appelle relation binaire *R de E vers F toute partie du produit cartésien E *F .*

- Cette partie s'appelle le graphe de la relation *R . On note* G_R

- On dit qu'un élément *x de E est en relation avec un élément y de F , par la relation R , si le couple (x, y) appartient au graphe* G_R .

*On note xRy , xTy, x~y ou bien x*y*

4. Relations binaires :

Exemples :

1) La relation d'inclusion dans l'ensemble des parties de E : ARB ssi $A \subset B$
2) La relation de divisibilité sur l'ensemble IZ : nRm ssi n divise m
3) La relation de congruence modulo a sur l'ensemble IZ, $(a \in IZ^*)$:

   nRm ssi $(n-m)$ est divisible par a

   On note cette relation par $n \equiv m \quad (a)$ et on lit n est congru à m modulo a.

- Sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on connaît les relations usuelles :

$\leq$, $<$, $\geq$, $>$, $=$, etc

(on peut aussi considérer les restrictions de ces relations à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$…)

4. Propriétés des relations binaires :

Définition :

Soit R une relation définie sur un ensemble E.

- La relation R est dite réflexive si $(\forall x \in E, \quad x R x)$
- La relation R est dite symétrique si $(\forall (x,y) \in E^2, \quad (x R y) \Rightarrow (y R x))$
- La relation R est dite transitive si $(\forall (x,y,z) \in E^3, \quad (x R y) \text{et} (y R z) \Rightarrow (x R z))$
- La relation R est dite antisymétrique si $(\forall (x,y) \in E^2, \quad ((x R y) \text{et} (y R x)) \Rightarrow x = y)$

Remarques :

- Une relation R est antisymétrique si $\forall (x,y) \in E^2, \quad ((x R y) \text{et} (x \neq y)) \Rightarrow non(y R x)$.
- Une relation R est symétrique si $(\forall (x,y) \in E^2, \quad (x R y) \Leftrightarrow (y R x))$.
- Une relation R qui n'est pas symétrique n'est pas nécessairement antisymétrique.
- Une relation qui est symétrique, antisymétrique et réflexive sur un ensemble E c'est la relation d'égalité sur cet ensemble.

4. Exemples Relations binaires :

1) La relation d'inclusion large dans l'ensemble des parties de E : ARB ssi $A \subseteq B$
   a. est réflexive, antisymétrique et transitive.
   b. n'est pas symétrique.

2) La relation d'inclusion stricte dans l'ensemble des parties de E : ARB ssi $A \subset B$
   a. est antisymétrique et transitive.
   b. n'est pas réflexive , n'est pas symétrique.

3) La relation de divisibilité sur l'ensemble IN : nRm ssi n divise m
   a. est réflexive, antisymétrique et transitive.
   b. n'est pas symétrique.

4) La relation de divisibilité sur l'ensemble IZ : nRm ssi n divise m
   a. est réflexive et transitive.
   b. n'est pas symétrique et n'est pas antisymétrique.

4. Exemples Relations binaires :

5) La relation de congruence modulo a sur l'ensemble IZ, $(a \in IZ^*)$: $n \equiv m \quad (a)$
   a. est réflexive, symétrique et transitive.
   b. n'est pas antisymétrique.

6) La relation d'inégalité large "$\leq$" dans les ensembles IN, IZ, IQ et IR : $xRy \;\; ssi\; x \leq y$
   a. est réflexive, antisymétrique et transitive.
   b. n'est pas symétrique.

7) La relation d'inégalité stricte "$<$" dans les ensembles IN, IZ, IQ et IR : $xRy \;\; ssi\; x < y$
   a. est réflexive, antisymétrique et transitive.
   b. n'est pas réflexive , n'est pas symétrique.

4. Relations d'équivalence :

Définition : On dit qu'une relation binaire R sur un ensemble E est une relation d'équivalence si elle est **Réflexive, Symétrique et Transitive.**

Exemple 1 : Etant donné E un ensemble non vide, alors L'égalité = est une relation d'équivalence dans E.

Exercice : Dans $\mathcal{R}$ on définit la relation T par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{xTy} \Leftrightarrow \mathrm{x}^2\text{-}1 = \mathrm{y}^2\text{-}1$$

Montrer que T est une relation d'équivalence

Solution

I) $\mathfrak{R}$ *est une relation Reflexive, car d'après la Réflexivité de l'égalité on a :*

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 = x^2 - 1,$$

donc

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}, \qquad x\mathfrak{R}x$$

ce qui montre que $\mathfrak{R}$ *est une relation Réflexive.*

II) $\mathfrak{R}$ *est une relation Symétrique, car d'après la Symétrie de l'égalité on a :*

$$\begin{aligned}\forall x,\ y \in \mathbb{R},\quad x\mathfrak{R}y &\iff x^2 - 1 = y^2 - 1\\ &\iff y^2 - 1 = x^2 - 1 \quad \textit{car l'égalité est symétrique}\\ &\iff y\mathfrak{R}x\end{aligned}$$

donc

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}, \qquad x\mathfrak{R}x \iff y\mathfrak{R}x$$

ce qui montre que $\mathfrak{R}$ *est une relation Symétrique.*

III) $\mathfrak{R}$ *est une relation Transitive, car d'après la Transitivité de l'égalité on a :*

$$\begin{aligned}\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R},\quad (x\mathfrak{R}y) \wedge (y\mathfrak{R}z) &\Longrightarrow (x^2 - 1 = y^2 - 1) \wedge (y^2 - 1 = z^2 - 1)\\ &\Longrightarrow (x^2 - 1 = z^2 - 1) \quad \textit{car l'égalité est Transitive.}\\ &\Longrightarrow (x\mathfrak{R}y)\,(x\mathfrak{R}y)\end{aligned}$$

donc

$$\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}, \qquad (x\mathfrak{R}y) \wedge (y\mathfrak{R}z) \Longrightarrow (x\mathfrak{R}y)$$

ce qui montre que $\mathfrak{R}$ *est une relation Transitive.*
De I) , II) *et* III) , *on déduit que* $\mathfrak{R}$ *est une relation déquivalence.*

4. Classe d'équivalence :

Définition :

Soit R une relation d'équivalence définie sur un ensemble E.

- On appelle la classe d'équivalence d'un élément x de E, l'ensemble de tous les éléments de E qui sont en relation avec x.
- On note $C(x)=\{y\in E \,/\, x\,R\,y\}=\{y\in E \,/\, y\,R\,x\}$.
- On note aussi la classe d'équivalence de x par $\bar{x}$ ou $\dot{x}$.

Remarques :

- Tout élément x de E appartient à sa propre classe d'équivalence, puisque la relation R est réflexive : $(\forall x\in E,\quad x\,R\,x)\Rightarrow x\in C(x)$

- Deux classes d'équivalences sont ou bien égales ou bien disjointes :
  $\forall (x,y)\in E^2$: Si $x\,R\,y$, alors $C(x)=C(y)$
  Si non, alors $C(x)\cap C(y)=\phi$

4. Relations d'ordre:

Définition : On dit qu'une relation binaire R sur un ensemble E est une relation d'ordre si elle est **Réflexive, anti-Symétrique et Transitive.**

Relation totale ou partielle

Définition 4 : Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.

- On dit que x et y de E sont comparable par $\mathscr{R}$ si : $x \mathscr{R} y$ ou $y \mathscr{R} x$.
- On dit que la relation $\mathscr{R}$ est totale si deux éléments quelconques de E sont comparable :
$$\forall x, y \in E, \quad x \mathscr{R} y \text{ ou } y \mathscr{R} x$$
- On dit que la relation $\mathscr{R}$ est partielle dans le cas contraire.

Exemple :

- Les relations $\leqslant$ et $\geqslant$ sur $\mathbb{R}$ sont totales mais $<$ et $>$ sont partielles car on ne peut comparer deux éléments identiques.
- La relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{Z}^*$ est partielle : on ne peut comparer 3 et 5 car l'un des deux n'est pas un diviseur de l'autre.

Exercice :

On munit dans $\mathbb{R}^2$ de la relation $<$ définie par :

$$(x, y) < (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

1. Monter que < est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

2. L'ordre est-il Total ?????

Solution

1. La relation $\prec$ est

- réflexive : pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $x\leq x$ et $y\leq y$.
- transitive : si $(x_1,y_1)\prec(x_2,y_2)$ et $(x_2,y_2)\prec(x_3,y_3)$, alors

$$x_1\leq x_2\leq x_3 \text{ et } y_1\leq y_2\leq y_3$$

  donc $(x_1,y_1)\prec(x_3,y_3)$.
- antisymétrique : si $(x,y)\prec(x',y')$ et $(x',y')\prec(x,y)$, alors on a à la fois $x\leq x'$ et $x'\leq x$ et donc $x=x'$ et de même $y=y'$.

Elle définit donc bien une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. L'ordre n'est pas total, car on ne peut pas comparer $(0,1)$ et $(1,0)$.

Solution TD 1

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(I)$ *puis pré ciser* f^{-1}:

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $I =]-\infty; 2]$.
2. $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$, $I =]-2; +\infty[$.

Solution

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $I =]-\infty; 2]$.

f est dérivable sur $I =]-\infty; 2]$, *et pour* $x \in]-\infty; 2]$, $f\prime(x) = 2x - 4$. *f est donc continue et strictement décroissante sur* $]-\infty; 2]$.

Par suite, f réalise une bijection de $]-\infty; 2]$ *sur* $f(]-\infty; 2]) = [f(2); \lim_{-\infty} f[= [-1, +\infty[= J$.

On note g l'application de I dans J qui, à x associe $x^2 - 4x + 3$. *g est bijective admet donc une réciproque. Déterminons* g^{-1}.

$y \in [-1, +\infty[$ *et* $x \in]-\infty; 2]$

$y = g(x) \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - y = 0$

$\triangle' = y + 1 \gg 0$

donc $x = 2 + \sqrt{y+1}$ *ou* $x = 2 - \sqrt{y+1}$

Or $x \in]-\infty; 2]$ *on aura* $x = 2 - \sqrt{y+1}$

Donc $\forall x \in [-1, +\infty[$ $g^{-1}(x) = 2 - \sqrt{y+1}$

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(I)$ puis pré ciser f^{-1}:

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad I =]-\infty; 2].$
2. $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}, \quad I =]-2; +\infty].$

Solution

2. $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}, \quad I =]-2; +\infty].$

On vérifie facilement que f réalise une bijection de $]-2; +\infty]$ *vers* $]-\infty; 2]$

Soit alors $x \in]-2; +\infty]$ *et* $y \in]-\infty; 2]$

$y = g(x) \Leftrightarrow \quad x = \frac{2y+1}{2-y}$

donc $\forall x \in]-\infty; 2] \qquad g^{-1}(x) = \frac{2x+1}{2-x}$

Exercice 2

A, B, C *et* E **des ensembles. Montrer les assertions suivantes :**

1. $\forall\ A, B \in P(E) \qquad A \cap B = A \cup B \ \Rightarrow \ A = B$

2. $\forall\ A, B, C \in P(E) \quad A \cap B = A \cap C \ \ et \ \ A \cup B = A \cup C \Rightarrow \ B = C.$

3. $[(A \cap B) \cup C] \cap B = B \cap (A \cup C)$

Solution

1. Si $A \cap B = A \cup B$ alors $A = B$. En effet, si $x \in A$ alors $x \in A \cup B = A \cap B$ et donc $x \in B$. Ceci montre que $A \subset B$. On montre de la même manière que $B \cup A$. Ainsi $A = B$.

2. nous le montrons par contraposition. Nous supposons que $A \neq B$ et devons monter que $A \cap B \neq A \cup B$.
Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A \setminus B$ ou alors un élément $x \in B \setminus A$. Quitte à échanger A et B, nous supposons qu'il existe $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

3 On a

$$\begin{aligned}
[(A \cap B) \cup C] \cap B &= (A \cap B \cap B) \cup C \cap B \\
&= (B \cap A) \cup (B \cap C) \\
&= B \cap (A \cup C)
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \frac{2x_n^2-3}{x_n+1}$

   Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad x_n > 3$$

2. En utilisant le raisonnement par contraposition, Montrer que :

$$\mathbf{x \neq 2} \ \text{ et } \ \mathbf{y \neq 2 \Rightarrow xy - 2x - 2y + 4 \neq 0}$$

3. Démontrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$ alors $a = b = 0$.

Exercice 3

1. **Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \frac{2x_n^2-3}{x_n+1}$**

   Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad x_n > 3$$

Correction 1 Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n > 3$. Soit l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n): \quad x_n > 3.$$

- La proposition $\mathcal{H}_0$ est vraie car $x_0 = 4 > 3$.
- Soit $n \geqslant 0$, supposons $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est alors vraie.

$$x_{n+1} - 3 = \frac{2x_n{}^2 - 3}{x_n + 2} - 3 = \frac{2x_n{}^2 - 3x_n - 9}{x_n + 2}.$$

  Par hypothèse de récurrence $x_n > 3$, donc $x_n + 2 > 0$ et $2x_n{}^2 - 3x_n - 9 > 0$ (ceci par étude de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 3x - 9$ pour $x > 3$). Donc $x_{n+1} - 3$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Nous avons montrer

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$$

  et comme $\mathcal{H}_0$ est vraie alors $\mathcal{H}_n$ est vraie quelque soit n. Ce qui termine la démonstration.

Exercice 3

2. En utilisant le raisonnement par contraposition, Montrer que :

$$x \neq 2 \text{ et } y \neq 2 \Rightarrow xy - 2x - 2y + 4 \neq 0$$

Solution

En utilisant le raisonnement par contraposition :

On suppose que

$$xy - 2x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ et } y = 2$$

on a

$$xy - 2x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(y-2)=0$$

alors $x = 2 \text{ et } y = 2$

Par suite on déduit que l'assertion est Vrai.

Exercice 3

3. Démontrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$ alors $a = b = 0$.

3. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $a + b\sqrt{2} = 0$ sans que $a = b = 0$. Alors, nécessairement $b \neq 0$ car si $b = 0$ alors on devrait aussi avoir $a = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $(a, b) \neq (0, 0)$. Mais alors, on a $\sqrt{2} = \frac{-a}{b} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux. L'hypothèse de départ est donc fausse, et on a $a = b = 0$.

Exercice 4

Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathcal{F}(X,X)$, on définit $f^0 = id$ et par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{\,n+1} = f^{\,n} o f.$$

1. **Montrer que** $\forall n \in \mathbb{N}$ **,** $f^{\,n+1} = f o f^{\,n}$

Solution

Correction 1. Montrons la proposition demandée par récurrence : soit A_n l'assertion $f^{n+1} = f \circ f^n$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ supposons A_n vraie. Alors

$$f^{n+2} = f^{n+1} \circ f = (f \circ f^n) \circ f = f \circ (f^n \circ f) = f \circ f^{n+1}.$$

Nous avons utiliser la definition de f^{n+2}, puis la proposition A_n, puis l'associativité de la composition, puis la définition de f^{n+1}. Donc A_{n+1} est vraie. Par le principe de récurrence

$$\forall \in \mathbb{N} \;\; f^n \circ f = f \circ f^n.$$

Exercice 5

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***et*** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***telles que***

$$f(x) = 3x + 1 \ \textbf{\textit{et}} \quad g(x) = x^2 - 1.$$

Vérifier que $fog = gof$

Solution

Correction Si $f \circ g = g \circ f$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ f \circ g(x) = g \circ f(x).$$

Nous allons montrer que c'est faux, en exhibant un contre-exemple. Prenons $x = 0$. Alors $f \circ g(0) = f(-1) = -2$, et $g \circ f(0) = g(1) = 0$ donc $f \circ g(0) \neq g \circ f(0)$. Ainsi $f \circ g \neq g \circ f$

Exercice 6

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)}$.

1. *f est-elle injective ? surjective ?*
2. *Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.*

Solution

Correction
1. f n'est pas injective car $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$. f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent : en effet l'équation $f(x) = 2$ devient $2x = 2(1+x^2)$ soit $x^2 - x + 1 = 0$ qui n'a pas de solutions réelles.
2. $f(x) = y$ est équivalent à l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation a des solutions x si et seulement si $\Delta = 4 - 4y^2 \geqslant 0$ donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1, 1]$. Nous venons de montrer que $f(\mathbb{R})$ est exactement $[-1, 1]$.

Exercice 7

Soit l'application f définie comme suit :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\} \\ x & \to & f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1} \end{array}$$

1. **f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?**
2. **Donner l'expression de $(f \circ f)(x)$.**
3. **Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$**
4. **Soit T la relation définie sur $]1; +\infty[$ par :**

$$xTy \Leftrightarrow \frac{y}{1+y^2} \leq \frac{x}{1+x^2}$$

Solution 9

1. – Injectivité : Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, *tels que* $f(x_1) = f(x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Rightarrow \quad \frac{x_1+1}{2x_1-1} = \frac{x_2+1}{2x_2-1} \\ &\Rightarrow \quad (2x_1-1)(x_2+1) = (2x_2-1)(x_1+1) \\ &\Rightarrow \quad 2x_2x_1 + 2x_1 - x_2 - 1 = 2x_2x_1 + 2x_2 - x_1 - 1 \\ &\Rightarrow \quad x_1 = x_2, \end{aligned}$$

alors f *est injective.*

– *Surjectivité : soit* $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $y = f(x)$

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Rightarrow \quad y = \frac{x+1}{2x-1} \\ &\Rightarrow \quad y(2x-1) = x+1 \\ &\Rightarrow \quad x(1-2y) = -y-1 \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{y+1}{2y-1}. \end{aligned}$$

Observons que $x = \frac{y+1}{2y-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow -1 = 2$ *ce qui est impossible, donc* $x \neq \frac{1}{2}$.

En conclusion $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}, \exists x = \frac{y+1}{2y-1} \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ *tel que* $y = f(x)$, *et par suite* f *est surjective.*

Solution 9

2. *Il est essentiel de noter que* $(f \circ f)$ *est bien définie, car l'ensemble d'arrivée de f est égal à son ensemble de départ.*

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)+1}{2f(x)-1} = \frac{\frac{x+1}{2x-1}+1}{2\frac{x+1}{2x-1}-1} = \frac{3x}{3} = x.$$

3. – *1ère méthode : on a déjà montré que* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ *on a* $(f \circ f)(x) = x$*, en d'autres termes* $(f \circ f) = Id_{\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}}$.
   nous pouvons conclure que f *est*
   bijective et de plus $f^{-1} = f$.

   – *2ème méthode : la méthode classique* $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$ *alors* $x = \frac{y+1}{2y-1}$, *par un changement d'inconnue* $y = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2x-1} = f(x)$

Solution 9

4/

Première méthode

$\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$ donc $x\mathcal{E}x$, $\mathcal{E}$ est réflexive.

Si $x\mathcal{E}y$ et $y\mathcal{E}x$ alors $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$ et $\frac{y}{1+y^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$ donc $\frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{1+y^2} \Leftrightarrow x(1+y^2) = y(1+x^2) \Leftrightarrow x - y + xy^2 - yx^2 = 0 \Leftrightarrow x - y + xy(y-x) = 0 \Leftrightarrow x - y - xy(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(1-xy) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$ car $x > 1$ et $y > 1$ entraine $1 - xy < 0$ en particulier $1 - xy \neq 0$. Donc $\mathcal{E}$ est antisymétrique.

Si $x\mathcal{E}y$ et $x\mathcal{E}z$ alors $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$ et $\frac{y}{1+y^2} \geq \frac{z}{1+z^2}$ donc $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{z}{1+z^2}$, d'où $x\mathcal{E}z$. $\mathcal{E}$ est transitive.

Finalement $\mathcal{E}$ est une relation d'ordre.

Soit $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$ et alors $x\mathcal{R}y$, soit $\frac{y}{1+y^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$ et alors $y\mathcal{R}x$, il s'agit d'une relation d'ordre total.

Exercice 8

Soit la relation définie sur $\mathbb{R}$ *par*

$$xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

1. *Montrer que* R *est une relation d'équivalence.*
2. *Déterminer la classe d'équivalence de* x *de* $\mathbb{R}$.

Correction

1. $x^2 - x^2 = x - x$ donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

Si $x\mathcal{R}y$ alors $x^2 - y^2 = x - y$ alors $y^2 - x^2 = y - x$ alors $y\mathcal{R}x$ donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x^2 - y^2 = x - y$ et $y^2 - z^2 = y - z$, en additionnant ces deux égalités on trouve $x^2 - z^2 = x - z$. $\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Soit $x \in \dot{a}$ si $x\mathcal{R}a$ c'est-à-dire si $x^2 - a^2 = x - a \Leftrightarrow x^2 - x + a - a^2 = 0$ autrement dit si x est solution de l'équation du second degré $X^2 - X + a - a^2 = 0$, évidemment a est solution, le produit des solutions est $a - a^2 = a(1 - a)$ donc l'autre solution est $1 - a$. Donc $\dot{a} = \{a, 1 - a\}$